

Produit scalaire et norme

Définitions

Soient $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$.

- Le **produit scalaire** de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est le nombre $\vec{v} \cdot \vec{w} \stackrel{\text{def}}{=} v_1 w_1 + \dots v_n w_n$.
- La **norme** de $\vec{v}$ est le nombre $\|\vec{v}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$.
- La **distance** entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est le nombre $d(\vec{v}, \vec{w}) \stackrel{\text{def}}{=} \|\vec{v} - \vec{w}\|$.

Propriétés

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- | | |
|---|---|
| ❶ $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$ | ❷ $\ \vec{v}\ = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$ |
| ❸ $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ | ❹ $\ \alpha \vec{v}\ = \alpha \ \vec{v}\ $ |
| ❺ $(\alpha \vec{v}) \cdot \vec{w} = \alpha (\vec{v} \cdot \vec{w})$ | ❻ $\frac{1}{\ \vec{v}\ } \vec{v}$ est unitaire (de norme 1). |

Orthogonalité

Définitions

Soient $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ et $W \subset \mathbb{R}^n$ un s.e.v.

- $\vec{v}$ est **orthogonal** à $\vec{w}$ si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$. On note $\vec{v} \perp \vec{w}$.
- $\vec{v}$ est **orthogonal** à W si $\vec{v}$ est orthogonal à tout $\vec{w} \in W$.
- Le **complément orthogonal** de W est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à W :

$$W^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n : \vec{v} \cdot \vec{w} = 0, \forall \vec{w} \in W \}.$$

Théorème

Soit $W \subset \mathbb{R}^n$ un s.e.v. Alors

- $W^\perp$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$
- $(W^\perp)^\perp = W$
- $W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$
- $\dim(W) + \dim(W^\perp) = n$

Si $A \in M_{m \times n}$, alors $(\text{Im}(A))^\perp = \text{Ker}(A^T)$. Pratique quand $W = \text{Span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\} = \text{Im}(A)$.

Projection orthogonale et bases orthogonales

Définitions

Soient $W \subset \mathbb{R}^n$ un s.e.v. et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus W$. La **projection orthogonale de $\vec{v}$ sur W** est le seul vecteur $\text{Proj}_W(\vec{v}) \in W$ satisfaisant

$$\text{Proj}_W(\vec{v}) \in W \quad \text{et} \quad \vec{v} - \text{Proj}_W(\vec{v}) \in W^\perp.$$

Une famille ou base de vecteurs $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ est

- **orthogonale** si $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0, \forall 1 \leq i \neq j \leq k$
- **orthonormale** si, de plus, $\|\vec{v}_i\| = 1, \forall 1 \leq i \leq k.$

Théorème

Soient $W \subset \mathbb{R}^n$ un s.e.v. et $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\}$ une base **orthogonale** de W . Alors pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire

$$\text{Proj}_W(\vec{v}) = \beta_1 \vec{b}_1 + \dots + \beta_k \vec{b}_k, \quad \text{avec } \beta_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{v} \cdot \vec{b}_i}{\|\vec{b}_i\|^2}, \quad \forall 1 \leq i \leq k.$$

Algorithme de Gram-Schmidt

Théorème

Soit une base $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\}$ d'un s.e.v $W \subset \mathbb{R}^n$. Alors on peut construire une **base orthogonale** $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k\}$ de W de la manière suivante :

- $\vec{c}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \vec{b}_1, \quad W_1 \stackrel{\text{def}}{=} \text{Span}\{\vec{c}_1\},$
- $\vec{c}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \vec{b}_2 - \text{Proj}_{W_1}(\vec{b}_2), \quad W_2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{Span}\{\vec{c}_1, \vec{c}_2\},$
- $\vec{c}_3 \stackrel{\text{def}}{=} \vec{b}_3 - \text{Proj}_{W_2}(\vec{b}_3), \quad W_3 \stackrel{\text{def}}{=} \text{Span}\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\},$
- $\vdots$
- $\vec{c}_i \stackrel{\text{def}}{=} \vec{b}_i - \text{Proj}_{W_{i-1}}(\vec{b}_i), \quad W_i \stackrel{\text{def}}{=} \text{Span}\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_i\},$
- $\vdots$
- $\vec{c}_k \stackrel{\text{def}}{=} \vec{b}_k - \text{Proj}_{W_{k-1}}(\vec{b}_k).$

La méthode des moindres carrés

Théorème

La projection orthogonale de $\vec{v}$ sur W est le vecteur qui **minimise la distance entre $\vec{v}$ et W** , c'est à dire

$$\|\vec{v} - \text{Proj}_W(\vec{v})\| \leq \|\vec{v} - \vec{w}\|, \forall \vec{w} \in W.$$

Théorème

Si le système linéaire $A\vec{x}$ est incompatible, alors la solution $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ de l'**équation normale**

$$A^T A \hat{x} = A^T \vec{b}$$

minimise la distance entre $A\vec{x}$ et $\vec{b}$, c'est à dire

$$\|A\hat{x} - \vec{b}\| \leq \|A\vec{x} - \vec{b}\|, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

On appelle $\hat{x}$ la **solution au sens des moindres carrés de $A\vec{x} = \vec{b}$**

Droite de régression

Définition

Soient un ensemble de points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$. La **droite de régression** de ces points est la droite $y = mx + h$ qui les approche aux mieux.

On peut calculer $\hat{x} = (m, h)$ en cherchant la solution au sens des moindres carrés du système

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_k & 1 \end{pmatrix} \hat{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}.$$